

7 клас. Відповіді та вказівки

1. Відомо, що $a^2 - b^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $a^6 - a^4b^2 - 2b^4 - 8b^2$.

Відповідь. 8.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} a^6 - a^4b^2 - 2b^4 - 8b^2 &= a^4(a^2 - b^2) - 2b^4 - 8b^2 = 2a^4 - 2b^4 - 8b^2 = \\ &= 2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 8b^2 = 4(a^2 + b^2) - 8b^2 = 4a^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2) = 8. \end{aligned}$$

2. Доведіть, що число $\overline{9912391}$, яке складається з 2007 дев'яток та одиниці, є складеним.

Розв'язання. Число $\overline{9912391}$ можна подати у вигляді $10^{2008} - 9$. Звідси

$$\overline{9912391} = (10^{1004})^2 - 3^2 = (10^{1004} - 3)(10^{1004} + 3).$$

Таким чином, дане число ми розклали на два натуральні множники, кожний з яких більше одиниці.

3. На стороні AB квадрата $ABCD$ у зовнішній бік побудовано рівносторонній трикутник ABK , а на стороні AD у внутрішній бік — рівносторонній трикутник ADM . Доведіть, що точки C , M і K лежать на одній прямій.

Розв'язання. Достатньо довести, що кут KMC дорівнює 180° . Розглянемо трикутник MAK . У цьому трикутнику

$$\angle MAK = \angle MAB + \angle BAK = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Крім того, кожна зі сторін AK і AM дорівнює стороні квадрата. Тобто $AK = AM$ і трикутник MAK рівнобедрений. Тоді $\angle AMK = 45^\circ$. Трикутник MDC також є рівнобедреним ($MD = CD$) і $\angle MDC = 30^\circ$. Тоді

$$\angle CMD = \angle MCD = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Маємо: $\angle KMC = \angle AMK + \angle AMD + \angle DMC = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ$.

4. Доведіть, що числа від 1 до 16 можна записати в рядок, але не можна записати по колу так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел була квадратом натурального числа.

Розв'язання. Серед чисел від 1 до 15 існує тільки одне, сума якого з числом 16 дорівнює квадрату натурального числа. Це число 9. Це означає, що число 16 не може мати більше одного «сусіда», а тому по колу дані числа розташувати неможливо.

В рядок числа можна розташувати так: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

5. Яких трицифрових чисел більше: тих, у яких друга цифра в десятковому запису більша за першу та третю, або тих, у яких друга цифра менша від першої та третьої? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь. Більше тих чисел, у яких друга цифра менше від першої та третьої.

Розв'язання. Числа, у яких друга цифра найбільша, назовемо числами I виду, а ті, у яких друга цифра найменша — II виду. Зрозуміло, що жодне з чисел I виду не починається з цифри 9. Кожному числу \overline{abc} I виду поставимо у відповідність число $999 - \overline{abc}$, яке є числом II виду. Але знайдуться числа II виду, для яких за таким правилом не можна підібрати відповідні числа I виду — це числа, що починаються з цифри 9.

