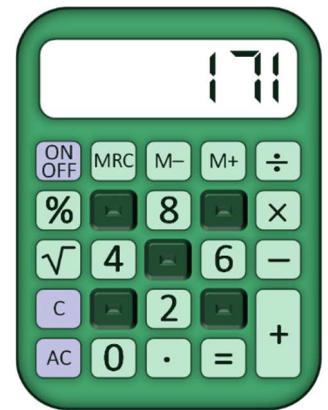




## XXXI Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»

### 7 клас

1. Якось калькулятор семикласника Андрійка зіпсували бешкетники-однокласники, виламавши з нього всі кнопки з непарними цифрами. Допоможіть Андрійкові, використовуючи лише парні цифри та одну із чотирьох арифметичних дій (+, −, ×, ÷), отримати число 171 для подальших обчислень на цьому калькуляторі.



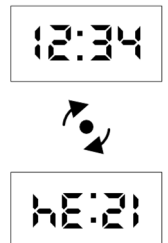
2. Розв'яжіть в цілих числах рівняння

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2024.$$

3. На табло електронного годинника можна побачити такі цифри:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Годинник показує час від 00:00 до 23:59. Помітимо, що цифри 1, 2, 5, 8 та 0 не змінюються, цифри 6 та 9 змінюють одна одну, а решта цифр втрачають зміст, якщо перевернути годинник (див. приклад). Скільки разів протягом доби можна побачити точний час на перевернутому годиннику (тобто такий час, що і на звичайному, і на перевернутому годинниках однаковий)?



4. У трикутнику  $ABC$  сторона  $AC = 1$  см, а сторона  $AB = 2$  см. На пряму, що містить бісектрису кута  $A$ , опустили перпендикуляр  $BK$ . Знайдіть відстань між точками  $C$  і  $K$ .  
(Сидоренко Михайло)
5. Однокласники Артем і Софійка, прийшовши до школи, побачили на дошці напис «МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА». Вони вирішили зіграти в таку гру: за один хід дозволяється стерти з дошки одну або кілька однакових літер. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто зможе перемогти в цій грі, якщо першою ходить Софійка?

Користуватися технічними засобами заборонено

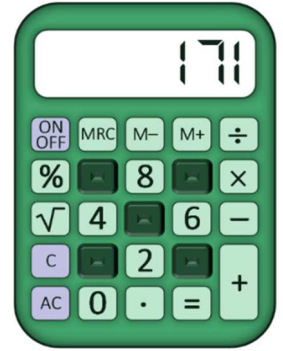
Час виконання роботи — 2 години 30 хвилин

Київ, ліцей «Лідер», 6 квітня 2024 року

Усю оперативну інформацію про олімпіаду шукайте за посиланням  
<https://www.facebook.com/groups/326310837754590>



1. Якось калькулятор семикласника Андрійка зіпсували бешкетники-однокласники, виламавши з нього всі кнопки з непарними цифрами. Допоможіть Андрійкові, використовуючи лише парні цифри та одну із чотирьох арифметичних дій (+, -, ×, ÷), отримати число 171 для подальших обчислень на цьому калькуляторі.  
**Відповідь:** наприклад,  $684 : 4$ .



2. Розв'яжіть в цілих числах рівняння  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2024$ .

**Відповідь:** дане рівняння не має розв'язків у цілих числах.

**Вказівка.** Розкривши дужки, отримаємо

$$-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 - 3xz^2 + 3x^2z,$$

що ділиться на 3. Число 2024 націло на 3 не ділиться.

3. На табло електронного годинника можна побачити такі цифри:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Годинник показує час від 00:00 до 23:59. Помітимо, що цифри 1, 2, 5, 8 та 0 не змінюються, цифри 6 та 9 змінюють одна одну, а решта цифр втрачають зміст, якщо перевернути годинник (див. приклад). Скільки разів протягом доби можна побачити точний час на перевернутому годиннику (тобто такий час, що і на звичайному, і на перевернутому годинниках однаковий)?

12:34



4E:21

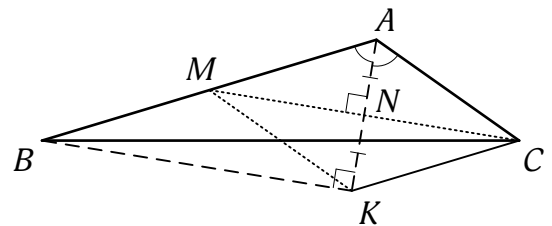
**Відповідь:** 11 разів.

**Вказівка.** Цифри 3, 4 та 7 використовувати не можемо. Якщо на першому місці стоїть цифра 1, 2 або 0, то на останньому місці також має стояти така сама цифра. На другому та третьому місцях можуть стояти однакові цифри 1, 2, 5 або 0. На третьому місці не можуть бути цифри 6, 8 та 9, тому на другому місці не може стояти 9, 8 та 6. Отже якщо на першому та четвертому місцях 0 або 1, то на другому та третьому місцях можуть бути 1, 2, 5 або 0. Тобто маємо 8 варіантів (00:00, 01:10, 02:20, 05:50, 10:01, 11:11, 12:21, 15:51). А якщо на першому та останньому місцях 2, то на другому та третьому можуть бути 1, 2 або 0. Тобто ще 3 варіанти (20:02, 21:12, 22:22).

4. У трикутнику  $ABC$  сторона  $AC = 1$  см, а сторона  $AB = 2$  см. На пряму, що містить бісектрису кута  $A$ , опустили перпендикуляр  $BK$ . Знайдіть відстань між точками  $C$  і  $K$ . (Сидоренко Михайло)

**Відповідь:** 1 см.

**Розв'язання.** Нехай  $M$  — середина  $AB$ , тоді  $BM = AM = AC = 1$  см,  $N$  — точка перетину  $CM$  та  $AK$ . Трикутник  $MAC$  — рівнобедрений, тому  $AN$  — бісектриса та висота, тобто  $CM \perp AK$ .  $KM$  — медіана прямокутного трикутника  $ABK$ , тому  $KM = AM = 1$  см, отже  $MN$  — висота та медіана рівнобедреного трикутника  $AMK$ . Тому  $AN = NK$ . Таким чином  $CN$  — висота та медіана трикутника  $ACK$ , отже  $CK = AC = 1$  см.



5. Однокласники Артем і Софійка, прийшовши до школи, побачили на дошці напис «МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА». Вони вирішили зіграти в таку гру: за один хід дозволяється стерти з дошки одну або кілька однакових літер. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто зможе перемогти в цій грі, якщо першою ходить Софійка?

**Відповідь:** переможе Софійка.

**Розв'язання.** На дошці написано 5 літер «А», 3 літери «М», по 2 літери «Т» та «І», по 1 літері «Е», «И», «Ч», «Н», «О», «Л», «П», «Д». Першим ходом Софійка має витерти дві літери «А» і залишити на дошці по 3 літери «А» та «М», по 2 літери «Т» та «І», по 1 літері «Е», «И», «Ч», «Н», «О», «Л», «П», «Д». Отримали три групи літер: («А» та «М»), («Т» та «І»), («Е», «И», «Ч», «Н», «О», «Л», «П», «Д»). У кожній групі парна кількість літер та однакова кількість повторів у записі, що залишився на дошці. Після ходу Артема Софійка повторюватиме кількість витертих літер у відповідній групі з іншою буквою. (Наприклад, якщо Артем витер 2 літери «М», то Софійка витиратиме 2 літери «А»; якщо Артем витирає 1 літеру «Т», то Софійка витиратиме 1 літеру «І».) Тоді після ходу Софійки або в одній з груп будуть повністю витерті дві літери, або кількість повторів літер групи залишиться однаковою. А отже після ходу Софійки в кожній групі залишатиметься парна кількість літер, що ще записані на дошці. Таким чином Софійка зможе витерти останню літеру.